Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

MUH1G3/ MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

TIM DOSEN

2 Determinan Matriks

Determinan Matriks

Sub Pokok Bahasan

- Permutasi dan Determinan Matriks
- Determinan dengan OBE
- Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

Beberapa Aplikasi Matriks

- Solusi SPL
- Optimasi
- Model Ekonomi
- dan lain-lain.

Permutasi dan Determinan Matriks

- **Permutasi** adalah susunan yang mungkin dibuat dengan memperhatikan urutan
- Contoh: Permutasi dari {1,2,3} adalah
  - (1,2,3)
  - (1,3,2)
  - (2,1,3)
  - (2,3,1)
  - (3,1,2)
  - (3,2,1)

Permutasi dan Determinan Matriks(2)

- **Invers dalam Permutasi**

  Sebuah inversi dikatakan terjadi dalam suatu permutasi jika bilangan bulat yang lebih besar mendahului bilangan bulat yang lainnya.

- Jika jumlah inversi dalam satu permutasinya genap maka disebut **permutasi genap**, dan begitu pula sebaliknya untuk **permutasi ganjil**.
  - (1,2,3) → permutasi genap
  - (1,3,2) → permutasi ganjil
  - (2,1,3) → permutasi ganjil
  - (2,3,1) → permutasi genap
  - (3,1,2) → permutasi genap
  - (3,2,1) → permutasi ganjil

Permutasi dan Determinan Matriks(3)

- **Hasil perkalian elementer** matriks berukuran $n \times n$ adalah hasilkali n buah unsur dari matriks tersebut tanpa ada pengambilan unsur dari baris dan kolom yang sama

- Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Terdapat 6 (atau 3!) hasil kali elementer dari matriks A, yakni

$$a_{11}a_{22}a_{33}, \quad a_{11}a_{23}a_{32}, \quad a_{12}a_{21}a_{33},$$
$$a_{12}a_{23}a_{31}, \quad a_{13}a_{21}a_{32}, \quad a_{13}a_{22}a_{31}$$

Permutasi dan Determinan Matriks(4)

- **Hasil kali elementer bertanda**

$a_{11}a_{22}a_{33}$
$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$
$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Perhatikan…
Tanda (+/-) muncul sesuai hasil klasifikasi permutasi indeks kolom,
yaitu : jika genap → + (positif)
jika ganjil → - (negatif)

- **Determinan** didefinisikan sebagai penjumlahan hasil kali elementer dengan bertanda.

Sehingga hasil kali elementer dari matriks A (determinan) dengan orde 3×3 adalah

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Permutasi dan Determinan Matriks(5)

- **Contoh:**

Tentukan Determinan Matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Jawab:

Menurut definisi:

$$\boldsymbol{det(A_{3\times 3}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

Atau dapat dilihat lebih mudah menggunakan

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Cara ini tidak berlaku untuk matriks 4x4, dst.

ket : jumlahkan hasil kali elemen yang terlintasi garis hijau dan kurangi hasil kali elemen yang terlintasi garis merah

Permutasi dan Determinan Matriks(6)

- **Contoh:**

Tentukan Determinan Matriks

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$|B| = \left|\begin{matrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{matrix}$$

$$= (3)(1)(1) + (2)(0)(-2) + (-1)(1)(-2) - (-1)(1)(-2) - (3)(0)(-2) - (2)(1)(1)$$

$$= 3 + 0 + 2 - 2 - 0 - 2$$

$$= 1$$

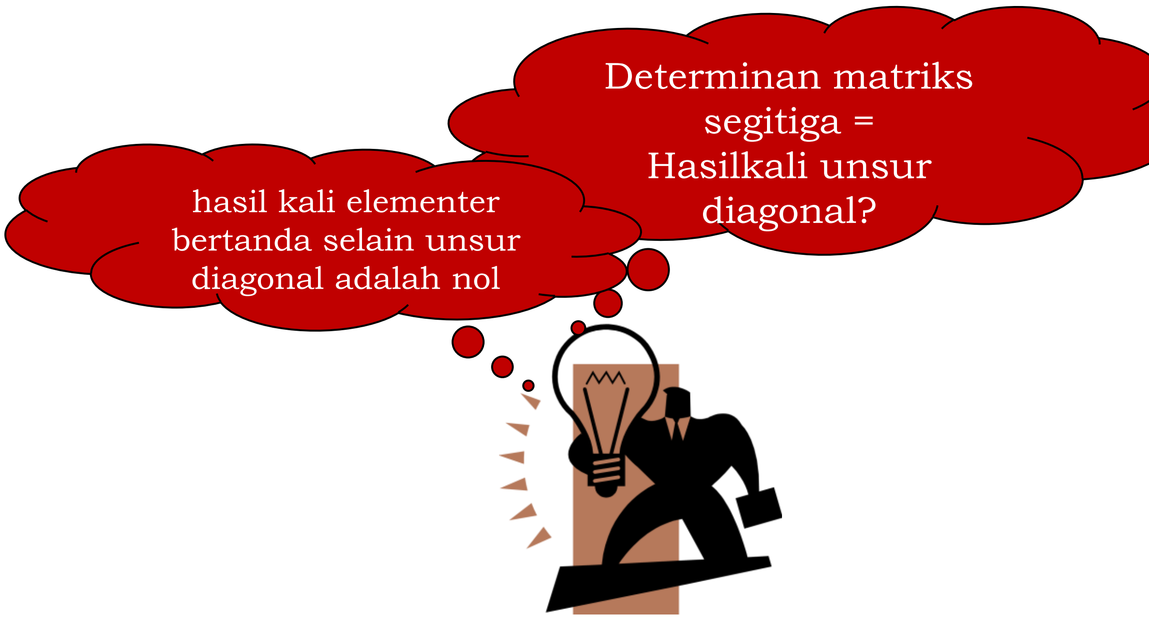
Determinan dengan OBE

- Perhatikan

a. $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24$

c. $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 45$



Determinan dengan OBE(2)

Menghitung determinan matriks dengan cara mengkalikan unsur-unsur diagonalnya hanya berlaku untuk matriks dengan bentuk segitiga bawah ataupun matriks segitiga atas.

Oleh karena itu :

Matriks bujur sangkar ~ OBE ~ Matriks Segitiga

Berikut ini adalah **pengaruh OBE** pada nilai determinan suatu matriks, yaitu :

1. Jika matriks B berasal dari matriks A dengan satu kali pertukaran baris maka $\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{B}) = -\,\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{A})$

   Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3$$

   sehingga

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 = -|A|$$

Determinan dengan OBE(3)

2. Jika matriks B berasal dari matriks A dengan mengalikan satu baris A dengan k maka $\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{k}\,\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{A})$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 3 \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

maka

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2|A| = 6$$

3. Jika matriks B berasal dari matriks A dengan perkalian sebuah baris dengan konstanta tak nol k lalu dijumlahkan pada baris lain maka $\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{A})$

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = -12$$

OBE yang dilakukan pada matriks tersebut adalah $-2b_1 + b_2$

Perhatikan $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = -12$

Determinan dengan OBE(4)

Tentukan determinan matriks berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{pertukaran baris ke - 1 dan ke - 2}$$

Determinan dengan OBE(5)

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad -2b_1 + b_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{Pertukaran baris ke - 2 dan ke - 3}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad 3b_2 + b_3$$

$= 4$ (hasil perkalian semua unsur diagonalnya)

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

Determinan dengan ekspansi kofaktor

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beberapa definisi yang perlu diketahui :

- M_{ij} disebut **Minor- *ij*** yaitu determinan matriks A dengan menghilangkan baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ matriks A.

  Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{maka } M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(2)

- C_{ij} dinamakan **kofaktor** $-$ $\boldsymbol{ij}$ yaitu $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

maka

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 .2$$

$$= -2$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(3)

Secara umum, cara menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor:

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke$-i$

$$\det(A) = ai_1 Ci_1 + ai_2 Ci_2 + \ldots + a_{in} C_{in}$$

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke$-j$

$$\det(A) = a_{ij} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \ldots + a_{nj} C_{nj}$$

Contoh: Hitunglah $\det(A)$ dengan ekspansi kofaktor :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(4)

Jawab :

A. Misalkan, kita akan menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-3

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} c_{3j}$$

$$= a_{31}\,C_{31} + a_{32}\,C_{32} + a_{33}\,C_{33}$$

$$= 0 + 1\,(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2 + 6 = 4$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(5)

B. Menghitung det (A) dengan ekspansi kopaktor sepanjang **kolom ke-3**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i3} c_{i3}$$

$$= a_{13}\,C_{13} + a_{23}\,C_{23} + a_{33}\,C_{33}$$

$$= 0 + 1\,(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

= 0 – 2 + 6

= 4

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(6)

- Misal $A_{n\times n}$ merupakan matriks yang memiliki invers dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij}. Maka

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor A. Transpos dari matriks tersebut dinamakan adjoin A (notasi $adj(A)$).

$$adj\ (A) = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(7)

Misalkan *A* punya invers

maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj\ (A)$$

A mempunyai invers *jika dan hanya jika* $\det(A) \quad 0$.

Beberapa sifat determinan matriks adalah :

1. Jika A adalah sembarang matriks kuadrat, maka $\det \quad (A) = \det(A^t)$
2. Jika A dan B merupakan matriks kuadrat berukuran sama, maka: $\det(A)\det(B) = \det(AB)$
3. Jika A mempunyai invers maka :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(8)

Contoh:

Diketahui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks adjoin A

Jawab :

Perhatikan bahwa

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{21} = 2,\ c_{22} = 1,\ c_{23} = -2,\ c_{31} = 1,\ c_{32} = 1,\ \text{dan}\ \ c_{33} = -1.$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(9)

Sehingga matriks kofaktor dari A :

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Maka matriks Adjoin dari A adalah :

$$adj(A) = C^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

LATIHAN

1. Tentukan determinan matriks dengan OBE dan ekspansi kofaktor

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Diketahui :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tunjukan bahwa : *det* (A) *det* (B) = *det* (AB)

LATIHAN(2)

3. Diketahui :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 4 \end{pmatrix}$$

Tentukan k jika *det* (D) = 29

4. Diketahui matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Jika B = A^{-1} dan A^t merupakan transpos dari A. Tentukan nilai

$$x = \frac{\det\left(2A^2\right) - \det(5B)}{\det\left(A^t B\right)}$$

THANK YOU