MUH1G3/ MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

TIM DOSEN

1 Matriks dan Operasinya

MATRIKS DAN OPERASINYA

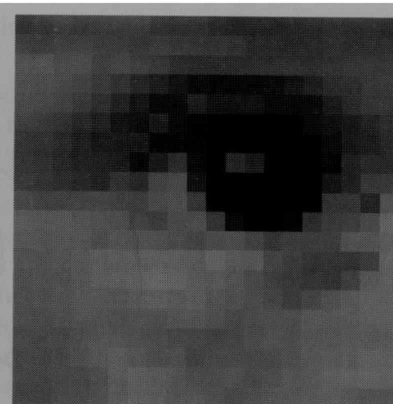
Sub Pokok Bahasan

- Matriks
- Jenis-jenis Matriks
- Operasi Matriks
- Operasi Baris Elementer
- Matriks Invers (Balikan)

Beberapa Aplikasi Matriks

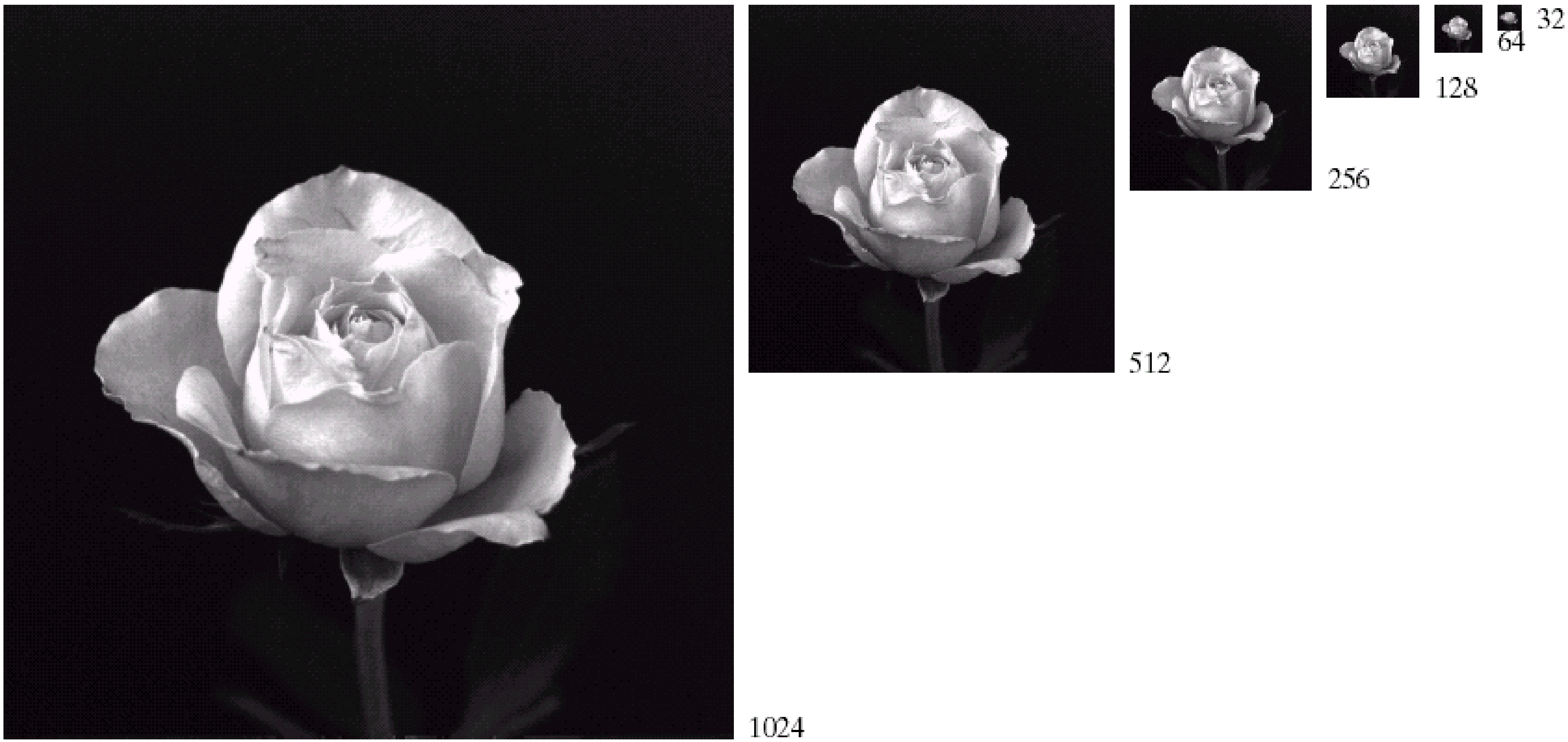
- Representasi image (citra)
- *Chanel/Frequency assignment*
- *Operation Research*
- dan lain-lain.

How are images represented in computer



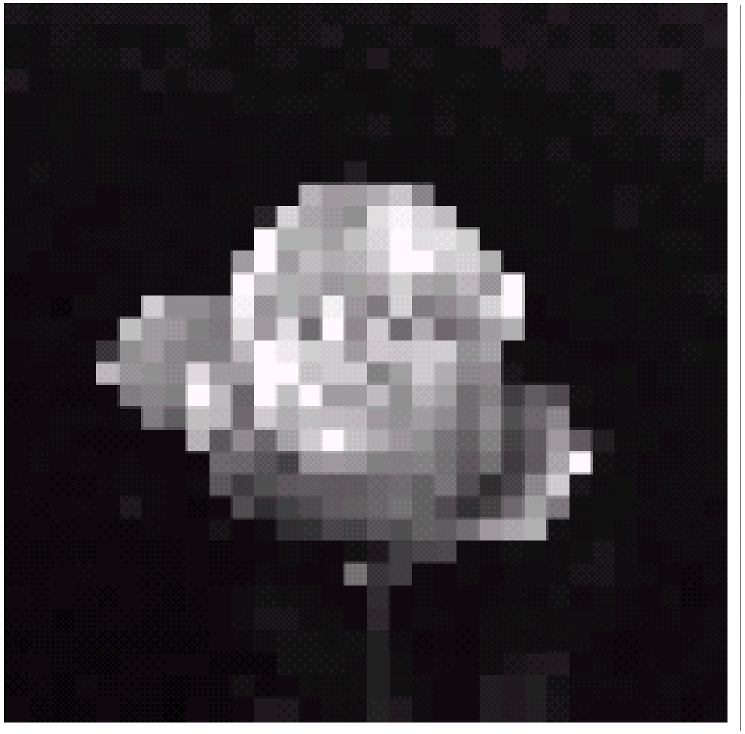
117	125	133	127	130	130	133	121	116	115	100	91	93	94	99	103	112	105	109	106
134	133	138	138	132	134	130	133	128	123	121	113	106	102	99	106	113	109	109	113
146	147	138	140	125	134	124	115	102	96	93	94	99	96	99	100	103	110	109	110
144	141	136	130	120	108	88	74	53	37	31	37	35	39	53	79	93	100	109	116
139	136	129	119	102	85	58	31	41	77	51	53	53	33	37	41	69	94	105	108
132	127	117	102	87	57	49	77	42	28	17	15	13	13	17	41	53	69	88	100
124	120	108	94	72	74	72	31	35	31	15	13	15	11	15	13	46	75	83	96
125	115	102	93	88	82	42	79	113	41	19	100	82	11	11	17	31	91	99	100
124	116	109	99	91	113	99	140	144	57	20	20	15	11	15	17	63	87	119	124
136	133	133	135	138	133	132	144	150	120	24	17	15	15	17	20	115	113	88	150
158	157	157	154	149	145	133	127	146	150	116	35	20	19	28	105	124	128	141	171
155	154	156	155	146	155	154	154	147	139	148	150	138	120	128	129	130	151	156	165
150	151	154	162	166	167	169	174	172	167	177	166	164	140	134	120	121	120	127	172
145	149	151	157	165	169	173	179	176	166	166	157	145	136	129	124	120	136	163	168
144	148	153	160	159	158	165	172	165	169	157	151	149	141	130	140	151	162	169	167
144	141	147	155	154	149	156	151	157	157	151	144	147	147	149	159	158	159	166	165
139	140	140	150	153	151	150	146	140	139	138	140	145	151	149	156	156	162	162	161
136	134	138	146	156	164	153	146	145	136	139	139	140	141	149	157	159	161	169	166
136	133	136	135	144	159	168	159	151	142	141	145	139	146	153	156	164	167	172	168
133	129	140	142	146	159	167	165	154	151	146	141	147	154	156	160	161	157	153	154

Spatial Resolution



Images taken from Gonzalez & Woods, Digital Image Processing (2002)

Spatial Resolution(2)



Images taken from Gonzalez & Woods, Digital Image Processing (2002)

Matriks

- Notasi Matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Baris pertama

Kolom Kedua

Unsur/entri/elemen ke-mn (baris ke m dan kolom ke n)

Matriks diatas berukuran (orde) $m \times n$

Matriks(2)

- Misal terdapat dua buah matriks berukuran sama A dan B. Matriks A dikatakan sama dengan matriks B $(A = B)$ jika

setiap unsur dari matriksnya sama

$(a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan $j)$

Jenis-jenis Matriks

- Matriks Bujur Sangkar

  Matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama

  Contoh:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonal utama

Jenis-jenis Matriks(2)

- Matriks Diagonal

  Matriks bujur sangkar dimana setiap unsur yang bukan merupakan elemen diagonal utama adalah nol

  Contoh:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Matriks Identitas

  Matriks diagonal dimana setiap unsur diagonal utamanya adalah satu

  Contoh:

$$I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks(3)

- Matriks segitiga
  - Matriks segitiga atas

    Matriks yang semua unsur di bawah diagonal utama pada kolom yang bersesuaian adalah nol

    Contoh:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

  - Matriks segitiga bawah

    Matriks yang semua unsur di atas diagonal utama pada kolom yang bersesuaian adalah nol

    Contoh:

$$B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks(4)

- Transpos Matriks

  Matriks transpos diperoleh dengan menukar baris matriks menjadi kolom dan sebaliknya

  Notasi A^T (hasil transpos matriks A)

  Contoh:

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

- Jika $A^T = A$ maka matriks A adalah matriks simetri

  Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks

Beberapa Operasi Matriks yang perlu diketahui :

1. Penjumlahan Matriks
2. Perkalian Matriks
    - Perkalian skalar dengan matriks
    - Perkalian matriks dengan matriks
3. Operasi Baris Elementer (OBE)

Operasi Matriks_Penjumlahan Matriks

- Syarat: Matriks yang dijumlahkan berorde (berukuran) sama
- Contoh:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks_Perkalian Matriks

- Terdapat 2 jenis Perkalian dalam Matriks
  - Perkalian scalar dengan matriks

$$k\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kp & kq \\ kr & ks \\ kt & ku \end{bmatrix}$$

  - Perkalian matriks dengan matriks

    Misal terdapat 2 buah matriks A berorde $p \times q$ dan B berorde $m \times n$.

    - Matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika $q = m$. Hasil perkaliannya (AB) berorde $p \times n$.
    - Matriks B dapat dikalikan dengan matriks A jika $n = p$. Hasil perkaliannya (BA) berorde $m \times q$.

Operasi Matriks_Perkalian Matriks(2)

- Contoh:

Diketahui $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2\times 3}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}_{3\times 2}$ maka

$$AB = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} ap+br+ct & aq+bs+cu \\ dp+er+ft & dq+es+fu \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Operasi Matriks_Perkalian dan Penjumlahan

- Misalkan A, B, C adalah matriks berukuran sama dena α, β merupakan unsur bilangan Riil,

  Maka operasi matriks memenuhi sifat berikut:

  1. $A + B = B + A$
  2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
  3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
  4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Operasi Matriks_Perkalian dan Penjumlahan(2)

- Contoh:

Diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan

a. AA^T

b. $A^T A$

Operasi Matriks_Perkalian dan Penjumlahan(3)

- Jawab:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 13 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Sedangkan

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer

Operasi baris elementer meliputi :

1. Pertukaran Baris
2. Perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol
3. Penjumlahan hasil perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol (seperti butir 2) dengan baris yang lain.

- Contoh OBE 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \underset{\sim}{b_1 \leftrightarrow b_2} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

"Baris pertama ditukar dengan baris ke 2"

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(2)

- Contoh OBE 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\frac{1}{2} b_1} \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 3 \quad 4 \quad 1 \end{bmatrix}$$

"Baris pertama dikalikan dengan konstanta ½"

- Contoh OBE 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\frac{1}{2} b_1 + b_2} \begin{bmatrix} 2 \quad 4 \quad 6 \\ \boxed{4 \quad 6 \quad 4} \end{bmatrix}$$

"Baris pertama dikalikan dengan konstanta $1/2$ **LALU** ditambahkan **KE** baris kedua"

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(3)

- Beberapa definisi yang perlu diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Baris pertama dan baris dua dinamakan **baris tak nol** (karena pada kedua baris tersebut memuat unsur tak nol)
  - Bilangan 1 pada baris pertama dan bilangan 3 pada baris kedua dinamakan **unsur pertama tak nol** pada baris masing-masing
  - Bilangan 1 pada baris pertama dan kolom pertama dinamakan **satu utama**
  - Baris ketiga dinamakan **baris nol** (karena setiap unsur pada baris ketiga adalah nol)

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(4)

- Sifat matriks hasil OBE :
  - Pada baris tak nol maka unsur tak nol pertama adalah 1(dinamakan satu utama)
  - Pada baris yang berturutan, baris yang lebih rendah memuat satu utama yang lebih ke kanan
  - Jika ada baris nol maka baris tersebut diletakan pada baris yang paling bawah
  - Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur yang lainnya adalah 0
- Suatu matriks dinamakan **eselon baris** jika memenuhi sifat **1,2, dan 3** (proses Eliminasi Gauss)
- Suatu matriks dinamakan **eselon baris tereduksi** jika memenuhi sifat **1,2,3, dan 4** (proses Eliminasi Gauss-Jordan)

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(5)

- Contoh:

  Tentukan matriks eselon baris tereduksi dari

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(6)

- *Jawab:*

$$A \underset{\sim}{-2b_1 + b_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{b_2 \leftrightarrow b_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-2b_2 + b_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{-b_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-b_3 + b_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{b_2 + b_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(7)

- Perhatikan hasil OBE tersebut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Setiap baris mempunyai satu utama.

Tidak setiap kolom memiliki satu utama, karena jumlah baris lebih sedikit dari jumlah kolom

(kolom 4 tidak mempunyai satu utama)

Invers Matriks

- Misal A adalah matriks bujur sangkar. B dinamakan invers matriks A jika memenuhi

$$AB = I \text{ atau } BA = I$$

Sebaliknya, A juga dinamakan B. Notasi $A = B^{-1}$

- Salah satu cara menentukan invers matriks adalah menggunakan OBE.

$$(A|I) \sim \ldots \sim (I|A^{-1})$$

- Jika OBE tidak menghasilkan matriks identitas maka A tidak memiliki invers

Invers Matriks(2)

- Tentukan matriks invers (jika ada) dari:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} b_1 \leftrightarrow b_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} -3b_1 + b_2 \\ 2b_1 + b_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Invers Matriks(3)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{-b_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{-b_3 + b_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{-b_2 + b_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Jadi Invers Matriks dari A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers Matriks(4)

- Perhatikan bahwa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers Matriks(5)

- Berikut ini adalah sifat-sifat matriks invers

i. $(A^{-1})^{-1} = A$

ii. Jika A, B dapat dibalik atau memiliki invers

maka $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

iii. Misal $k \in Riil$ maka $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k} A^{-1}$

iv. Akibat dari (ii) maka $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

LATIHAN

- Diketahui:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, dan\ C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. AB

b. $3CA$

c. $(AB)C$

d. $(4B)C + 2C$

LATIHAN(2)

- Diketahui:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} dan\ E = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

e. Tentukan $D + EE$

f. Tentukan matriks bentuk eselon baris tereduksi dari A, B, C, D, E

g. Tentukan matriks invers dari D dan E (jika ada)

THANK YOU