Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

CNH2B4 / KOMPUTASI NUMERIK

TIM DOSEN

KK MODELING AND COMPUTATIONAL EXPERIMENT

9 PENGINTEGRALAN NUMERIK

METODE MONTE CARLO

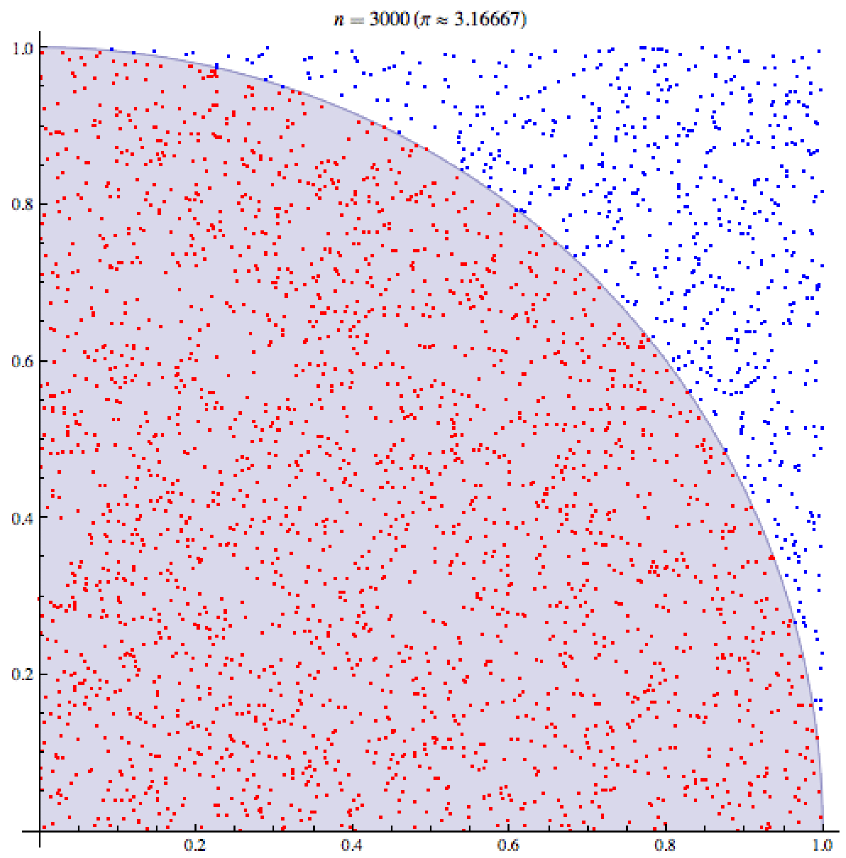
- Metode ini memanfaatkan bilangan acak untuk mencari solusi integral secara numerik, sehingga metode ini biasa disebut sebagai metode Monte Carlo.

- Ada dua teknik dalam mencari integral numerik menggunakan metode Monte Carlo.

- Pertama adalah metode "kena atau tidak kena". Teknik ini menghitung banyaknya titik yang dibangkitkan secara acak yang ada di bawah kurva kemudian dibandingkan dengan titik-titik secara keseluruhan.

- Teknik yang kedua adalah dengan menggunakan teorema Nilai Rata-Rata. Teknik dengan teorema Nilai Rata-Rata ini lebih umum dan bisa digunakan dalam pengintegralan multi dimensi.

Contoh Metode Monte Carlo



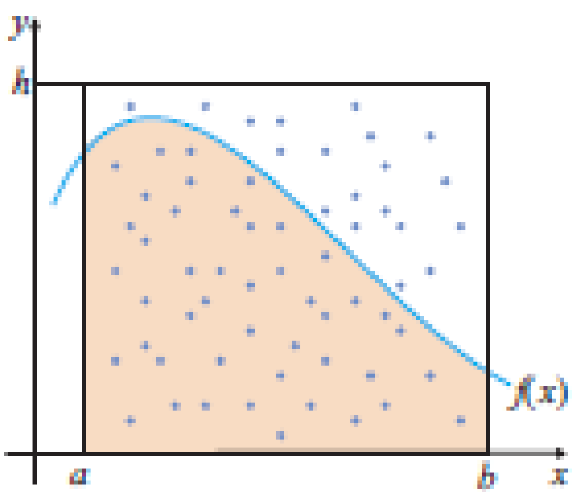
$$L = \frac{\pi r^2}{4}$$

$$\pi = \frac{4L}{r^2}$$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

METODE MONTE CARLO 1

Misalkan suatu fungsi f (x) terdapat di dalam suatu persegi panjang dengan tinggi h dan lebar b − a, sehingga luas persegi panjang tersebut adalah A = h(b − a), lihat gambar di bawah ini.



Langkah-langkah metode Monte Carlo 1

1. Bangkitkan n buah titik (x_r, y_r) secara acak dengan $a \le x_r \le b$ dan $0 \le y_r \le h$.
2. Hitung banyaknya titik yang ada di bawah kurva $f(x)$, yaitu titik-titik yang memenuhi $y_r \le f(x_r)$, misalkan banyaknya titik tersebut adalah n_s.
3. Aproksimasi dari integral $f(x)$ diberikan oleh

$$F_n = \frac{n_s}{n} A.$$

METODE MONTE CARLO 1

Algoritma 1.1: Metode Monte Carlo 1 untuk mengaproksimasi $\int_a^b f(x)dx$

Masukan: n banyaknya titik yang akan dibangkitkan; a batas kiri; b batas kanan; h tinggi persegi panjang; $f(x)$ integran.

Keluaran: F_n hasil integral numerik.

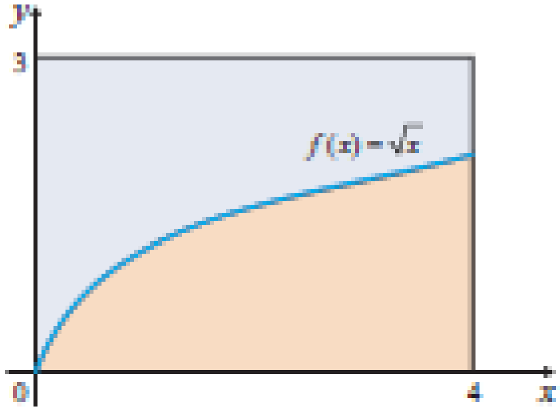
for $i = 1$ **to** n **do**
    Langkah 1
    $r_1 \leftarrow \text{rand}[0,1]()$ ▷ *membangkitkan bilangan acak antara 0 dan 1*
    $r_2 \leftarrow \text{rand}[0,1]()$
    $x_r \leftarrow a + (b-a) \cdot r_1$
    $y_r \leftarrow r_2 \cdot h$
    Langkah 2
    if $y_r \leq f(x_r)$ **then**
        $n_s \leftarrow n_s + 1$
    end if
end for
Langkah 3
$F_n \leftarrow n_s/n \cdot (b-a) \cdot h$

METODE MONTE CARLO 1

Contoh 1

Selesaikan integral berikut secara numerik menggunakan metode Monte Carlo 1. Coba untuk beberapa nilai n, $n = 100$, $n = 1000$, $n = 10000$, $n = 100000$, dan $n = 1000000$. Kemudian bandingkan dengan nilai eksaknya.

$$\int_0^4 \sqrt{x}\, dx.$$



Error Aktual

Error aktual dari metode Monte Carlo 1 diberikan oleh

$$\text{error} = |F_{\text{eksak}} - F_{\text{numerik}}|.$$

Error aktual digunakan untuk mengukur keakuratan dari metode ini.

METODE MONTE CARLO 1

Jawab

Pertama kita tentukan ukuran dari persegi panjang yang memuat $f(x) = \sqrt{x}$ dengan $x = 0$ sampai $x = 4$. Karena maksimum dari $f(x)$ dalam selang $[0,4]$ adalah $f(4) = 2$ maka tinggi persegi panjang harus di atas 2. Misalkan kita pilih tinggi persegi panjang $h = 3$ (lihat Gambar 1.5). Selanjutnya ikuti langkah-langkah metode Monte Carlo 1. Solusi numerik untuk $n = 100, n = 1000, n = 10000, n = 100000$, dan $n = 1000000$ dapat dilihat pada Tabel 1.1.

Tabel 1.1: Solusi numerik $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

n	n_s	F_n	error	
100	30	3.6000	1.7333	–
1000	415	4.9800	0.3533	▼
10000	4430	5.3160	0.0173	▼
100000	44340	5.3208	0.0125	▼
1000000	444643	5.3357	0.0024	▼

Teorema Nilai Rata-rata

Teorema 1 (Teorema Nilai Rata-Rata untuk Integral)

Jika $f(x)$ kontinu pada selang $[a, b]$, maka terdapat suatu bilangan real c dalam selang $[a, b]$, sedemikian sehingga

$$f(c) = \langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \tag{6.16}$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \tag{6.17}$$

METODE MONTE CARLO 2

Langkah-langkah metode Monte Carlo 2

1. Bangkitkan n buah bilangan acak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dalam selang $[a, b]$.
2. Tentukan nilai rata-rata dari fungsi $f(x)$:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

3. Hitung aproksimasi untuk integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\langle f \rangle.$$

Perkiraan Error

Perkiraan error dari metode Monte Carlo 2 diberikan oleh

$$\text{error} \approx (b-a)\sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{n}}$$

dengan

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i).$$

Error aktual dengan perkiraan error jelas berbeda.

METODE MONTE CARLO 2

Algoritma 1.2: Metode Monte Carlo 2 untuk mengaproksimasi $\int_a^b f(x)dx$

Masukan: n banyaknya titik yang akan dibangkitkan; a batas kiri; b batas kanan; $f(x)$ integran.

Keluaran: F_n hasil integral numerik; pe perkiraan error.

$S \leftarrow 0$

$S2 \leftarrow 0$

Langkah 1

for $i = 1$ **to** n **do**

  $r \leftarrow \text{rand}[0,1]()$

  $x_r \leftarrow a + (b - a) \cdot r$

  $S \leftarrow S + f(x_r)$

  $S2 \leftarrow S2 + f(x_r) \cdot f(x_r)$

end for

Langkah 2

$f_{avg} \leftarrow S/n$

$f2_{avg} \leftarrow S2/n$

Langkah 3

$F_n \leftarrow (b - a) \cdot f_{avg}$

$pe \leftarrow (b - a) \cdot \text{sqrt}((f2_{avg} - f_{avg} \cdot f_{avg})/n)$

METODE MONTE CARLO 2

Contoh 2

Selesaikan integral yang diberikan pada Contoh 1 menggunakan metode Monte Carlo 2.

Jawab

Berdasarkan langkah-langkah metode Monte Carlo 2 yang sudah dijelaskan sebelumnya kita peroleh solusi numerik sebagai berikut.

Tabel 1.2: Solusi numerik untuk $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$ menggunakan metode Monte Carlo 1 dan 2.

n	MC1	MC2	eMC1	eMC2		peMC2	
100	3.6000	5.5584	1.7333	0.2251	–	0.1703	–
1000	4.9800	5.3578	0.3533	0.0244	▼	0.0591	▼
10000	5.3160	5.3344	0.0173	0.0011	▼	0.0189	▼
100000	5.3208	5.3245	0.0125	0.0088	▲	0.0060	▼
1000000	5.3357	5.3340	0.0024	0.0007	▼	0.0019	▼

INTEGRAL DUA DIMENSI

Langkah-langkah metode Monte Carlo 2

1. Bangkitkan n buah titik acak $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ dalam persegi panjang $[a, b] \times [c, d]$.

2. Tentukan nilai rata-rata dari fungsi $f(x, y)$:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).$$

3. Hitung aproksimasi untuk integral:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx \approx (b-a)(d-c)\langle f \rangle.$$

Perkiraan Error

Perkiraan error dari metode Monte Carlo 2 untuk integral lipat dua adalah

$$\text{error} \approx (b-a)(d-c)\sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{n}}$$

dengan

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i, y_i).$$

Algoritma 6.3: Metode Monte Carlo 2 untuk mengaproksimasi $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$

Masukan: n banyaknya titik yang akan dibangkitkan; a batas kiri; b batas kanan; c batas bawah; d batas atas; $f(x,y)$ integran.

Keluaran: F_n hasil integral numerik; pe perkiraan error.

$S \leftarrow 0$
$S2 \leftarrow 0$
Langkah 1
for $i = 1$ to n **do**
    $r_1 \leftarrow \text{rand}[0,1]()$
    $r_2 \leftarrow \text{rand}[0,1]()$
    $x_r \leftarrow a + (b-a) \cdot r_1$
    $y_r \leftarrow c + (d-c) \cdot r_2$
    $S \leftarrow S + f(x_r, y_r)$
    $S2 \leftarrow S2 + f(x_r, y_r) \cdot f(x_r, y_r)$
end for
Langkah 2
$f_{\text{avg}} \leftarrow S/n$
$f2_{\text{avg}} \leftarrow S2/n$
Langkah 3
$F_n \leftarrow (b-a) \cdot (d-c) \cdot f_{\text{avg}}$
$pe \leftarrow (b-a) \cdot (d-c) \cdot \text{sqrt}((f2_{\text{avg}} - f_{\text{avg}} \cdot f_{\text{avg}})/n)$

Contoh 3

Carilah solusi numerik dari

$$\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dy dx.$$

Jawab

Ikuti langkah-langkah di atas maka kita akan memperoleh hasil numerik sebagai berikut.

Tabel 6.3: Solusi numerik untuk Contoh 3

n	F_n	pe	
100	1.8216	0.0120	–
1000	1.8209	0.0037	▼
10000	1.8226	0.0012	▼
100000	1.8220	0.0004	▼
1000000	1.8218	0.0001	▼

■

THANK YOU