Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

CNH2B4 / KOMPUTASI NUMERIK

TIM DOSEN

KK MODELING AND COMPUTATIONAL EXPERIMENT

1 REVIEW KALKULUS & KONSEP ERROR

Fungsi

- Misalkan A adalah himpunan bilangan. Fungsi *f* dengan domain A adalah sebuah aturan atau prosedur komputasi dimana kita dapat menghitung keluaran tunggal f(x) untuk setiap masukan bilangan x dalam himpunan A.
- Contoh: misalkan $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

Cari f(4), f(-x), dan f(2x).

Interval

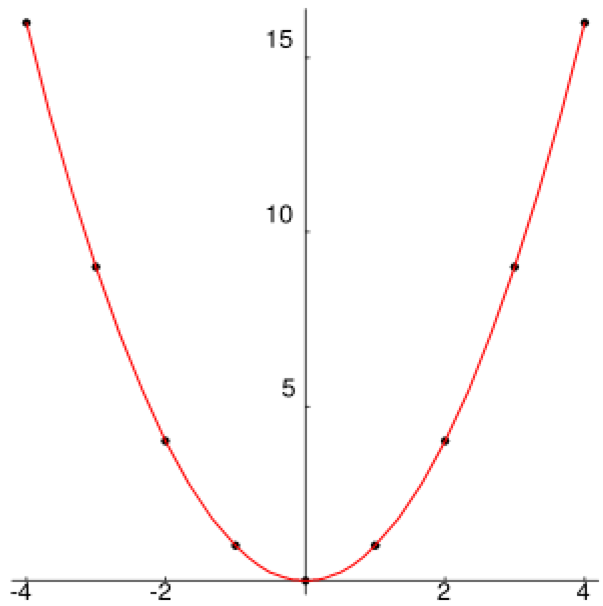
- Interval tutup [a,b] artinya $a \leq x \leq b$.
- Interval buka (a,b) artinya $a < x < b$.
- Interval [a,b) artinya $a \leq x < b$.
- Interval (a,b] artinya $a < x \leq b$.

Grafik Fungsi

- Misalkan fungsi f didefinisikan oleh aturan $f(x) = x^2$
- Tuliskan nilai f(x) untuk beberapa nilai x:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

- Grafik dari fungsi f(x) adalah



Limit

- Kita tuliskan

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

- Ini berarti limit dari f(x), dengan x mendekati a, sama dengan L.

Kekontinuan

- Fungsi f kontinu di titik a jika

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Teorema Nilai Antara

Misalkan f kontinu dalam selang $[a,b]$ dan L adalah sembarang bilangan real di antara $f(a)$ dan $f(b)$. Maka, terdapat nilai c dengan $a < c < b$ sedemikian sehingga $f(c) = L$.

Turunan Fungsi

Misalkan *f* terdefinisi di dalam selang terbuka yang mengandung a. Maka, *f* dikatakan **dapat diturunkan** di *x* = *a* jika

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Notasi *f'(a)* disebut turunan (*derivative*) *f* di *x* = *a*. Bentuk turunan yang ekivalen ialah dengan memisalkan *x* = *a* +*h*, sehingga

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Teorema Nilai Rata-rata

Misalkan *f* kontinu dalam selang *[a,b]* dan *f'(x)* ada untuk semua $a < x < b$. Jika $f(a) \neq f(b) \neq 0$, maka terdapat nilai *c*, dengan $a < c < b$, sedemikian sehingga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema Dasar Kalkulus Pertama :

Jika *f* kontinu dalam selang *[a,b]*, maka terdapat fungsi *F*, yang disebut antiturunan dari *f*, sedemikian sehingga

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

dengan *F′(x) = f(x).*

Teorema Dasar Kalkulus Kedua :

Jika *f* kontinu dalam selang *[a,b]*, maka

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Deret Taylor

- Jika fungsi f mempunyai ekspansi deret pangkat di titik a, maka

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

- Contoh: tentukan deret Taylor untuk f(x) = e^x sampai orde 1, kemudian tentukan nilai dari e.

Error

Jika *â* adalah nilai hampiran terhadap nilai eksak (analitik) *a* maka selisih *â* dengan *a* disebut dengan **error absolut.**

$$\varepsilon_{abs} = \left| a - \hat{a} \right|$$

Error lebih berarti jika diketahui perbandingan dengan nilai eksaknya yang disebut **error relatif** :

$$\varepsilon_{relatif} = \frac{\left| a - \hat{a} \right|}{\left| a \right|} \times 100\%$$

Contoh

- Misalkan Anda diminta untuk mengukur panjang jembatan. Ternyata hasil pengukuran diperoleh panjang jembatan = 9999 cm. Jika panjang jembatan sebenarnya 10000 cm, tentukan error absolut dan error relatif dari pengukuran tersebut?

Error

- ***Round-off Error***
  - diakibatkan keterbatasan komputer menyimpan detail bilangan real.
  - Panjang bilangan yang melebihi kemampuan media penyimpanan akan dibulatkan (ke atas)
- ***Truncation Error***
  - Diakibatkan oleh adanya penghentian komputasi tak hingga menjadi berbatas.
  - Digunakan hampiran sebagai pengganti formula yang eksak.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \rightarrow e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

Angka Penting

- Angka yang dapat digunakan secara pasti.
- Angka penting akan terlihat dengan pasti jika ditulis dalam notasi ilmiah. Jumlah angka penting terletak pada jumlah digit mantis.

Bilangan Floating Point

- Formula bilangan floating point :

  $a = \underline{+}\, m \times b^{\pm p}$

  dengan:

  m = mantis (real) atau angka signifikan

  b = basis

  p = pangkat (bilangan bulat positif)

- Format standar floating point :
  - Single (32 bit) , C++: rentang 1.2e-38 sampai 3.4e+38 dengan 6 digit presisi
  - Double (64 bit), C++: rentang 2.3e-308 sampai 1.7e+308 dengan 15 digit presisi

Bilangan Floating Point (Contd)

- Bilangan Floating Point Ternormalisasi
  - Untuk menyeragamkan penyajian
  - Agar semua digit mantis merupakan angka penting
  - Format :

    $a = \underline{+}\ m \times b^{\pm p} = \underline{+}0.d_1d_2d_3d_4..d_n \times b^{\pm p}$

    dengan syarat $1 \leq d_1 \leq b-1$ dan $0 \leq d_k \leq b-1$ untuk $k>1$.

Pembulatan pada Floating Point

- **Pemenggalan (chopping)**

  Digit bilangan yang lebih banyak daripada digit mantis komputer akan mengalami pemenggalan

  $a = \underline{+}0.d_1d_2d_3\ldots d_nd_{n+1}\ldots \times 10^{\underline{+}p}$

  Dengan n digit mantis pada komputer akan menjadi:

  $fl_{chop}(a) = \underline{+}0.d_1d_2d_3\ldots d_n \times 10^{\underline{+}p}$

- Contoh :

  Bilangan $\pi = 0.31415926535897\ldots. \times 10^1$

  Pada komputer dengan mantis 7 bit menjadi

  $fl_{chop}(\pi) = 0.3141592 \times 10^1$

  error = 0.000000065…

Pembulatan pada Floating Point (Cont.)

- Pembulatan ke digit terdekat (in-rounding)
- Bilangan basis 10

  $a = \underline{+}0.d_1d_2d_3...d_nd_{n+1}... \times 10^{\pm p}$

  Pembulatan dengan n digit mantis menjadi :

  $fl_{round}(a) = \underline{+}0.d_1d_2d_3...z \times 10^{\pm p}$

  z dalam hal ini :

  $$z = \begin{cases} d_n & \text{jika } d_{n+1} < 5 \\ d_n + 1 & \text{jika } d_{n+1} > 5 \\ d_n & \text{jika } d_{n+1} = 5 \text{ dan n genap} \\ d_n + 1 & \text{jika } d_{n+1} = 5 \text{ dan n ganjil} \end{cases}$$

- Contoh : Bilangan basis 10

  $\pi = 0.31415926535897.... \times 10^1$

  $fl_{round}(\pi) = 0.3141593 \times 10^1$

Perambatan Error

- Pada suatu proses komputasi yang memiliki error akan menyebabkan penumpukkan error apabila proses tersebut dilakukan secara beruntun (iteratif).
- Menyebabkan hasil yang menyimpang dari sebenarnya → kondisi tidak stabil (ketidakstabilan numerik)
- Kondisi stabil: error pada hasil antara memiliki pengaruh yang sedikit pada hasil akhir.
- Ketidakstabilan matematika : kondisi yang timbul karena hasil perhitungan sangat peka terhadap perubahan kecil input.

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

THANK YOU