Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

CNH2B4 / KOMPUTASI NUMERIK

TIM DOSEN

KK MODELING AND COMPUTATIONAL EXPERIMENT

12

PENCOCOKAN KURVA

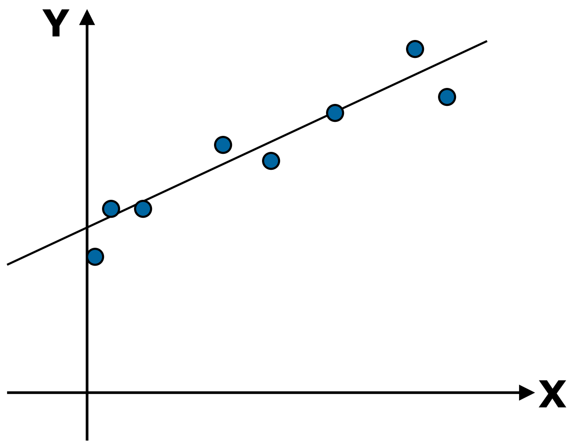
Pendahuluan

- Data yang berasal dari hasil pengamatan lapangan, pengukuran atau tabel yang diambil dari buku-buku acuan.
- Nilai antara, turunan, integral → mudah dicari untuk fungsi polinom
- Fungsi sulit perlu disederhanakan menjadi fungsi polinom → $f(x) \approx p_n(x)$

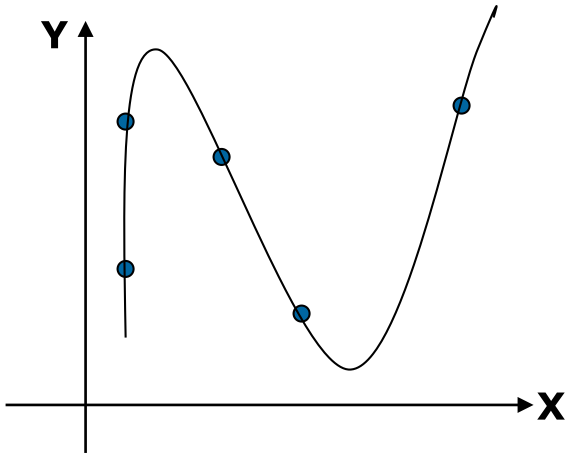
$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Pendahuluan (Cont.)

- Bantuan beberapa titik dicocokan dalam kurva $p_n(x)$.
- Metode pencocokan titik dengan sebuah kurva ada 2 macam:



Regresi



Interpolasi

Regresi

- Untuk data dengan berketelitian rendah
- Kurva tidak perlu melewati semua titik yang tersedia
- Kurva yang dibentuk merupakan kecenderungan dari sekelompok data
- Dipilih kurva yang memiliki selisih antara titik data dengan kurva hampiran sekecil mungkin
- Ketidaktelitian disebabkan oleh : kesalahan mengukur, ketidaktelitian alat ukur atau kelakuan sistem yang diukur.

Regresi (Cont.)

- Prinsip penting yang harus diketahui dalam pencocokan kurva untuk data hasil pengukuran :
  - Fungsi mengandung sesedikit mungkin parameter bebas
  - Deviasi fungsi dengan titik data dibuat minimum
- Manfaat Pencocokan Kurva untuk data hasil pengukuran :
  - Bagi ahli sains/rekayasa : mengembangkan formula empirik untuk sistem yang diteliti
  - Bagi ahli ekonomi : menentukan kurva kecenderungan ekonomi untuk meramalkan kecenderungan yang akan datang

Regresi Linier

- Persamaan kurva : $f(x) = a + bx$ dari titik-titik (x_i, y_i).
- Karena (x_i, y_i) merupakan hasil pengukuran yang mengandung galat, maka dapat ditulis :

  $g(x_i) = y_i + e_i,\ i = 1,2,\ldots,n$

- Deviasi persamaan kurva dengan nilai data :

  $r_i = y_i - f(x_i) = y_i - (a + bx_i)$

Regresi Linier (Cont.)

- Total kuadrat deviasinya :

$$R = \sum r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

Agar R minimum, maka haruslah :

$$\partial R / \partial a = -2\sum (y_i - a - bx_i) = 0 \quad \text{dan} \quad \partial R / \partial b = -2\sum x_i (y_i - a - bx_i) = 0$$

Kedua persamaan dibagi -2, menjadi :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a - \sum_{i=1}^{n} bx_i = 0$$

$$\sum x_i (y_i - a - bx_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} ax_i - \sum_{i=1}^{n} bx_i^2 = 0$$

Regresi Linier (Cont.)

- Selanjutnya :

$$\sum_{i=1}^{n} a + \sum_{i=1}^{n} bx_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} ax_i + \sum_{i=1}^{n} bx_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

atau

$$\boxed{\begin{aligned} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}}$$

Dalam bentuk persamaan matrik :

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$

Solusinya:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Regresi Kuadratik

- Persamaan kurva : $f(x) = a + bx + cx^2$ dari titik-titik (x_i, y_i).
- Karena (xi,yi) merupakan hasil pengukuran yang mengandung galat, maka dapat ditulis :

$$g(x_i) = y_i + e_i,\ i = 1,2,\ldots,n$$

- Deviasi persamaan kurva dengan nilai data :

$$r_i = y_i - f(x_i) = y_i - (a + bx_i + cx_i^2)$$

Regresi Kuadratik (Cont.)

Total kuadrat deviasinya :

$$R = \sum r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i - cx_i^2)^2$$

Agar R minimum, maka haruslah :

$$\partial R / \partial a = -2\sum (y_i - a - bx_i - cx_i^2) = 0$$

$$\partial R / \partial b = -2\sum x_i (y_i - a - bx_i - cx_i^2) = 0$$

$$\partial R / \partial c = -2\sum x_i^2 (y_i - a - bx_i - cx_i^2) = 0$$

Regresi Kuadratik (Cont.)

- Ketiga persamaan dibagi -2, menjadi :

$$\sum (y_i - a - bx_i - cx_i^2) \Rightarrow \sum y_i - \sum a - \sum bx_i - \sum cx_i^2$$
$$\sum x_i (y_i - a - bx_i - cx_i^2) \Rightarrow \sum x_i y_i - \sum ax_i - \sum bx_i^2 - \sum cx_i^3$$
$$\sum x_i^2 (y_i - a - bx_i - cx_i^2) \Rightarrow \sum x_i^2 y_i - \sum ax_i^2 - \sum bx_i^3 - \sum cx_i^4$$
$$\Downarrow$$
$$\sum a + \sum bx_i + \sum cx_i^2 = \sum y_i$$
$$\sum ax_i + \sum bx_i^2 + \sum cx_i^3 = \sum x_i y_i$$
$$\sum ax_i^2 + \sum bx_i^3 + \sum cx_i^4 = \sum x_i^2 y_i$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

Linearisasi

- Regresi linier hanya cocok untuk data yang memiliki hubungan linier antara variabel bebas dengan variabel terikatnya.
- Penggambaran grafik dan pemeriksaan data secara visual untuk memastikan apakah berlaku suatu model linier

Linearisasi Pangkat Sederhana

- Mencocokkan data dengan fungsi $y = Cx^b$

$$y = Cx^b$$

$$\ln(y) = \ln(C) + b\ln(x)$$

$$Y = a + bX$$

i	x_i	y_i	$X_i = \ln(x_i)$	$Y_i = \ln(y_i)$	X_i^2	X_iY_i
1	0.15	4.4964	-1.897119985	1.503277077	3.5991	-2.8519
2	0.4	5.1284	-0.916290732	1.63479372	0.8396	-1.49795
3	0.6	5.6931	-0.510825624	1.739254915	0.2609	-0.88846
4	1.01	6.2884	0.009950331	1.838706666	1E-04	0.018296
5	1.5	7.0989	0.405465108	1.959939842	0.1644	0.794687
6	2.2	7.5507	0.78845736	2.021640274	0.6217	1.593977
7	2.4	7.5106	0.875468737	2.016315356	0.7664	1.765221
			-1.244894804	**12.71392785**	**6.2522**	**-1.06612**
			ΣX_i	ΣY_i	ΣX_i^2	ΣX_iY_i

Sistem persamaan linier :

$$\begin{bmatrix} 7 & -1.2447 \\ -1.2447 & 6.2522 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.7139 \\ -1.0659 \end{bmatrix}$$

Solusinya adalah : a = 1.8515, b = 0.1981

$$C = e^a = e^{1.8515} = 6.369366$$

Jadi kurva yang dipakai :

$$\boxed{y = 6.369366\,x^{0.1981}}$$

Linearisasi Fungsi Eksponensial

- Mencocokkan data dengan fungsi y = Ce^{bx}

$$y = Ce^{bx}$$
$$\ln(y) = \ln(C) + bx\ln(e)$$
$$\ln(y) = \ln(C) + bx$$

$$Y = a + bX$$

i	x_i	y_i	$Y_i = \ln(y_i)$	X_i^2	X_iY_i
1	0.15	4.4964	1.503277077	0.0225	0.2255
2	0.4	5.1284	1.63479372	0.16	0.6539
3	0.6	5.6931	1.739254915	0.36	1.0436
4	1.01	6.2884	1.838706666	1.0201	1.8571
5	1.5	7.0989	1.959939842	2.25	2.9399
6	2.2	7.5507	2.021640274	4.84	4.4476
7	2.4	7.5106	2.016315356	5.76	4.8392
	8.26		**12.71392785**	**14.4126**	**16.007**
	ΣX_i		ΣY_i	ΣX_i^2	ΣX_iY_i

Sistem persamaan linier :

$$\begin{bmatrix} 7 & 8.26 \\ 8.26 & 14.416 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.7139 \\ 16.007 \end{bmatrix}$$

Solusinya adalah : a = ….., b =……..

$$C = e^a = e^a = \ldots\ldots$$

Jadi kurva yang dipakai :

$$y = Ce^{bx}$$

Interpolasi

- (n+1) buah titik berbeda $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$.
- Menentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga :

  $y_i = p_n(x_i)$ untuk $i=0,1,2,..,n$
- Selanjutnya p(x) dapat digunakan untuk menghitung hampiran y(x).
- Jika $x_0<x_k<x_n$, maka $p(x_k)$ disebut nilai interpolasi.
- Jika $x_k<x_0$ atau $x_k>x_n$, maka $p(x_k)$ disebut nilai ekstrapolasi.
- Interpolasi bermanfaat untuk mencari nilai hampiran sebagai pengisi kaitan data yang hilang.

Interpolasi Linier

- Interpolasi dua buah titik dengan sebuah garis lurus. Misal (x_0,y_0) dan (x_1,y_1).
- Persamaan garis lurus yang terbentuk :

  $p_1(x) = a_0 + a_1x$

- a_0 dan a_1 dicari dengan cara berikut :

$$y_0 = a_0 + a_1 x_0$$

$$y_1 = a_0 + a_1 x_1$$

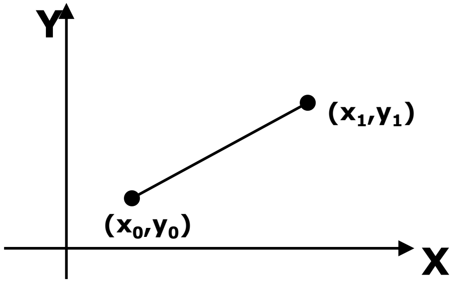
Dengan proses eliminasi dan subtitusi didapatkan:

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$a_0 = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$$

Setelah disubtitusi dalam persamaan dan dilakukan sedikit otak-atik aljabar didapatkan :

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$



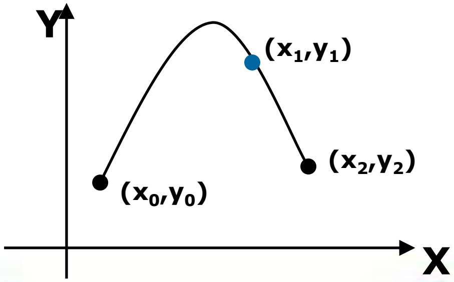
Interpolasi Kuadratik

- Interpolasi tiga buah titik dengan sebuah persamaan polinom kuadrat. Misal (x_0,y_0), (x_1,y_1) dan (x_2,y_2).
- Persamaan polinom kuadrat yang terbentuk :

  $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$
- Persamaan dari 3 titik dengan a_0, a_1 dan a_2 adalah sebagai berikut :

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0$$
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1$$
$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2$$

dengan metode eliminasi Gauss, didapatkan nilai a0,a1 dan a2.



Interpolasi Kubik

- Interpolasi empat buah titik dengan sebuah persamaan polinom kubik. Misal (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2), dan (x_3,y_3).

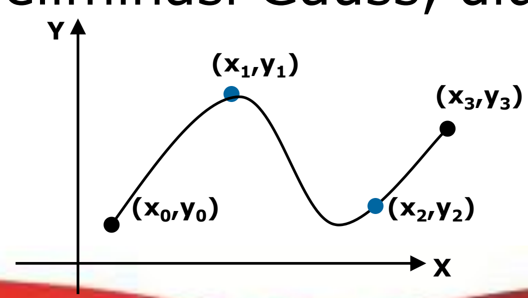
- Persamaan polinom kuadrat yang terbentuk :

  $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

- Persamaan dari 4 titik dengan a_0, a_1, a_2 dan a_3 adalah sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 &= y_0 \\
a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 &= y_1 \\
a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 &= y_2 \\
a_0 + a_1x_2 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 &= y_3
\end{aligned}
$$

Dengan metode eliminasi Gauss, didapatkan nilai a0,a1 dan a2.



Resume

Interpolasi linier, kuadratik, kubik dan seterusnya relatif kurang disukai disebabkan persamaan yang diperoleh (terutama yang berderajat tinggi) akan berkondisi buruk.

Interpolasi Lagrange

- Nama diambil dari penemunya Joseph Louis Lagrange (Perancis)
- Bentuk umum derajat $\leq$n untuk (n+1) titik berbeda :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

Contoh Kasus :

Diberikan fungsi y = f(x) dengan 3 buah titik data dalam tabel berikut :

X	1	4	6
Y	1.5709	1.5727	1.5751

tentukan nilai f(3.5)!

Interpolasi Lagrange

```
function Lagrange (x:real; n: integer): real;
var
i, j : integer;
P, L : real;
begin
     P = 0;
     for i:=0 to n do
       begin
          L :=1;
          for j:=0 to n do
           if i<>j then
             L:=L*(x-x(j))/(x(i)-x(j));
          endfor
          P:=P+y(i)*L;
     endfor;
     Lagrange :=P;
end.
```

Kurang disukai karena :

- Jumlah komputasi yang dibutuhkan untuk satu kali interpolasi besar.
- Hasil komputasi pada derajat yang lebih rendah tidak bisa digunakan untuk menghitung derajat yang lebih tinggi.

Interpolasi Newton

- Bentuk umum :

(i) Rekurens :

$$p_n(x) = p_{n-1}(x)+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

(ii) Basis :

$$p_0(x) = f(x_0) = y_0$$

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0) \\ a_1 &= f[x_1, x_0] \\ a_2 &= f[x_2, x_1, x_0] \\ &\ldots \\ a_n &= f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] \end{aligned}$$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$\ldots$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0]}{x_n - x_0}$$

Bentuk umum juga dapat ditulis :

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0] + \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

Tabel Selisih Terbagi Newton

i	x_i	$y_i=f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3	…
0	x_0	$f(x_0)$	f[x1,x0]	f[x2,x1,x0]	f[x3,x2,x1,x0]	…
1	x_1	$f(x_1)$	f[x2,x1]	f[x3,x2,x1]	…	
2	x_2	$f(x_2)$	f[x3,x2]	…		
3	x_3	$f(x_3)$	…			
…	…	…				

ST : Selisih Terbagi

Contoh Kasus :

Diberikan data pada tabel dibawah ini, taksirlah nilai fungsi di x = 2.5! Dengan polinom newton orde 4.

x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
$f(x_i)$	1.0000	0.5403	-0.4161	-0.9900	-0.6536

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

THANK YOU