Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

CNH2G4/ KOMPUTASI NUMERIK

TIM DOSEN

KK MODELING AND COMPUTATIONAL EXPERIMENT

11 SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Pendahuluan

- Persamaan Differensial :

  Gabungan dari fungsi yang tidak diketahui dengan turunannya.

- Kategori Persamaan Differensial :
  - PD Biasa :

    Persamaan Differensial yang hanya memiliki satu variabel bebas.

    Berdasarkan turunan tertinggi yang dimiliki, PDB dikategorikan menjadi :
    - PDB Orde 1 : turunan tertingginya adalah turunan pertama
    - PDB Orde 2 : turunan kedua merupakan turunan tertinggi
    - PDB Orde 3 : turunan ketiga merupakan turunan tertingginya.
    - Dan seterusnya
  - PD Parsial

    Persamaan Differensial yang memiliki lebih dari satu variabel bebas.

Pendahuluan (Cont.)

Contoh Persamaan :

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

Turunan dilambangkan dengan : dy/dx atau f'(x) atau y', sedangkan fungsi yang tidak diketahui dilambangkan dengan keberadaan variabel terikatnya.

seperti contoh di atas, maka :

Turunan dilambangkan dengan dy/dx dan fungsi yang tidak diketahui diwakili dengan variabel y.

Pendahuluan (Cont.)

Kategorikan : (PD / bukan PD / PDP / PDB ?)

1.	$y' = x^2 + y^2$	PDB orde 1
2.	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xye^{x+y}$	PDP
3.	$y' = 3t^3 - t^{-5} + 17; y = f(t)$	Bukan PD
4.	$y'' + y' Cos(x) - 3y = Sin(2x)$	PDB orde 2
5.	$2y''' - 2y' = 1 - y''$	PDB orde 3
6.	$f'(x) - x^2 - x = -4$	Bukan PD
7.	$\dfrac{\partial u}{\partial t} = 3Sin(x+t) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	PDP
8.	$2\,{}^{dy}\!/_{dx} + x^2 y - y = 0$	PDB orde 1

Pendahuluan (Cont.)

- Solusi PDB :
  - solusi analitik : salah satunya dengan teknik integral
  - solusi numerik : menggunakan metode hampiran.
- Solusi Numerik :

  mencari nilai fungsi di x_{r+1}, dimana r menunjukkan jumlah langkah atau iterasi.
- Langkah/iterasi memiliki jarak yang sama (h)

  $x_r = x_0 + rh; \quad r = 0,1,2,\ldots,n$

PDB Orde Satu

- Bentuk baku PDB orde satu :

$$\frac{dy}{dx} = f\,'(x) = y\,' = f\,(x, y)$$

- Contoh :

$$2y' + xy = 100;\ y(0) = 1 \rightarrow y' = \frac{100 - xy}{2}$$

$$-xy + 2\,{}^{y}\!/_{x} = y' - y;\ y(1) = -1 \rightarrow y' = -xy + 2\,{}^{y}\!/_{x} + y$$

- Metode penyelesaian :
  - Euler
  - Heun
  - Runge-Kutta

Metode Euler

- Bentuk baku : $$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y' = f(x,y); y(x_0) = y_0$$
$$y_r = y(x_r)$$
$$x_r = x_0 + rh$$
- Penurunan
  - Deret Taylor : uraikan $y(x_{r+1})$ disekitar x_r
$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)}{1!} y'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!} y''(x_r) + \ldots$$
  - Dipotong sampai orde 1:
$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)}{1!} y'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!} y''(t); x_r \le t \le x_{r+1}$$
  - Karena $y'(x_r) = f(x_r, y_r)$ dan $x_{r+1} - x_r = h$, maka :
$$\boxed{y(x_{r+1}) \approx y(x_r) + hf(x_r, y_r) + O(h^2); r = 0,1,2,\ldots,n}$$

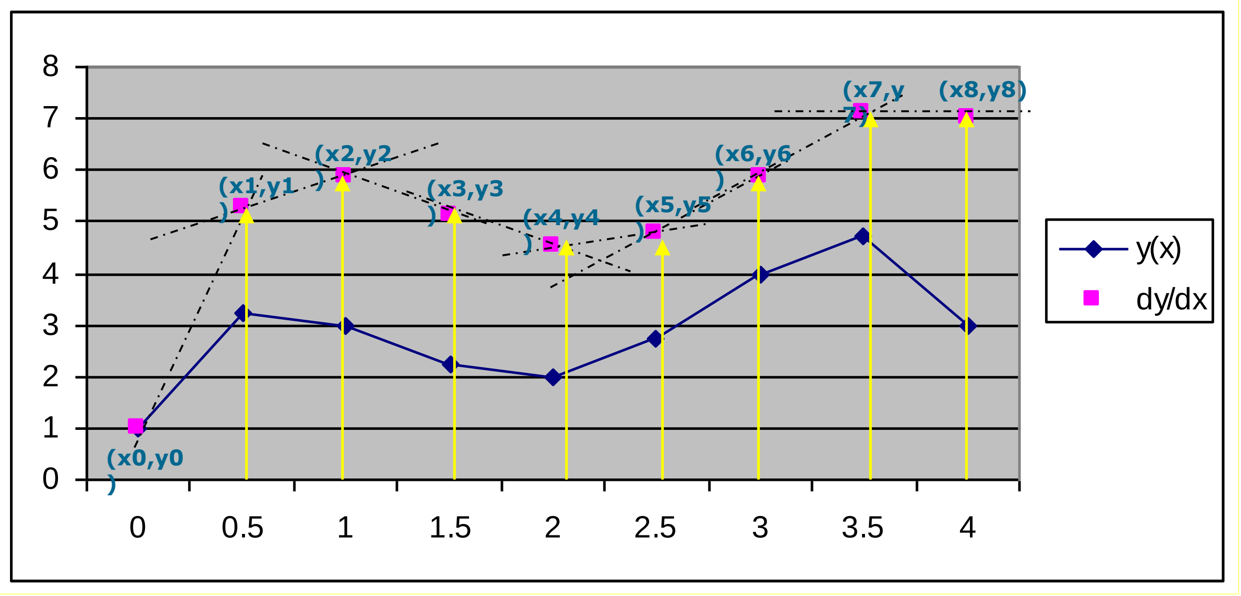
Metode Euler (Cont.)

- Penurunan secara geometris :

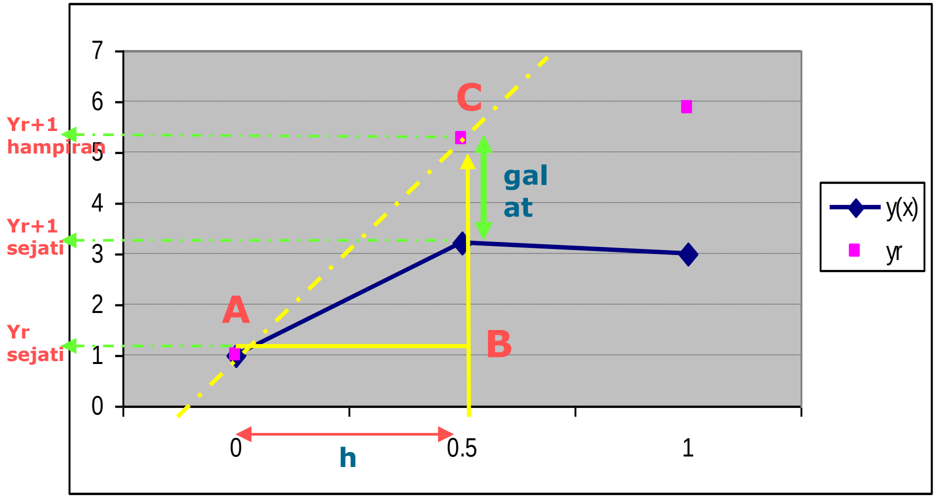
  $f(x,y)$ adalah persamaan differensial yang dapat digambarkan sebagai gradien garis singgung di titik (x,y).

- Garis singgung ditarik menyinggung titik (x_0,y_0) untuk menemukan nilai $y(x_1)$, pada titik (x_1,y_1) ditarik lagi garis yang menyinggung titik tersebut dengan fungsi $f(x,y)$ untuk mendapatkan $f(x_2)$ dan seterusnya.

Metode Euler (Cont.)



Metode Euler (Cont.)



$$m = y'(x_r) = f(x_r, y_r) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{BC}{AB} = \frac{y_{r+1} - y_r}{h}$$

$$hf(x_r, y_r) = y_{r+1} - y_r$$

$$y_{r+1} = y_r + hf(x_r, y_r)$$

Metode Euler (Cont.)

- Galat
  - Galat Pemotongan

$$Ep \approx \frac{1}{2} h^2 y''(t) = O(h^2)$$

sebanding dengan kuadrat ukuran langkah

  - Galat Kumulatif

$$E_{kumulatif} \approx \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2} h^2 y''(t) = \frac{nh^2}{2} y''(y) = \frac{(b-a)}{2h} h^2 y''(t) = \frac{(b-a)hy''(t)}{2} = O(h)$$

Metode Euler (Cont.)

Contoh Soal :

Diketahui dy/dx =x + y ; y(0) = 0. Berapa y(0.1) dengan langkah h = 0.02 dan h = 0.05, jika diketahui fungsi asli adalah $y(x) = e^{x}-x-1$, langkah mana yang lebih teliti ?

h = 0.05	
x = 0	y(0) = 0
x = 0.05	y(0.05) = 0 + 0.05(0+0) = 0
x = 0.1	**y(0.1)** = 0 + 0.05(0.05+0) = **0.0025**

h = 0.02	
x = 0	y(0) = 0
x = 0.02	y(0.02) = 0 + 0.02(0+0) = 0
x = 0.04	y(0.04) = 0 + 0.02(0.02+0) = 0.0004
x = 0.06	y(0.06) = 0.0004 +0.02(0.04+0.0004) = 0.001208
x = 0.08	y(0.08) = 0.001208 +0.02(0.06+0.001208) = 0.00243216
x = 0.1	**y(0.1)** = 0.00243216 + 0.02(0.08+0.00243216) = **0.0040808032**

$y(0.1) = e^{0.1}-0.1-1$
$=0.005170918$

Langkah h = 0.02 lebih teliti

Metode Heun

- Merupakan perbaikan metode Euler.
- Solusi Euler dijadikan solusi perkiraan awal dan diperbaiki dengan metode Heun.
- Perbaikan gradien yang digunakan merupakan rata-rata gradien dari 2 titik yang ada.

Metode Heun (Cont.)

- Dari satu titik awal (x_r, y_r), iterasi dan gradien didapatkan perkiraan nilai $y(x_{r+1})$ selanjutnya (x_{r+1}, y_{r+1}) beserta gradiennya.
- Dari dua gradien yang ada dicari rata-ratanya kemudian digunakan untuk menghitung kembali nilai $y(x_{r+1})$.
- Misal :
  - Awal iterasi dimiliki (x_0, y_0) dan $f(x_0, y_0)$
  - Kemudian digunakan untuk menghitung $y(x_1)$ dan didapatkan $f(x_1, y_1)$
  - Hitung kembali $y(x_1)$ dengan gradien $(f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1))/2$

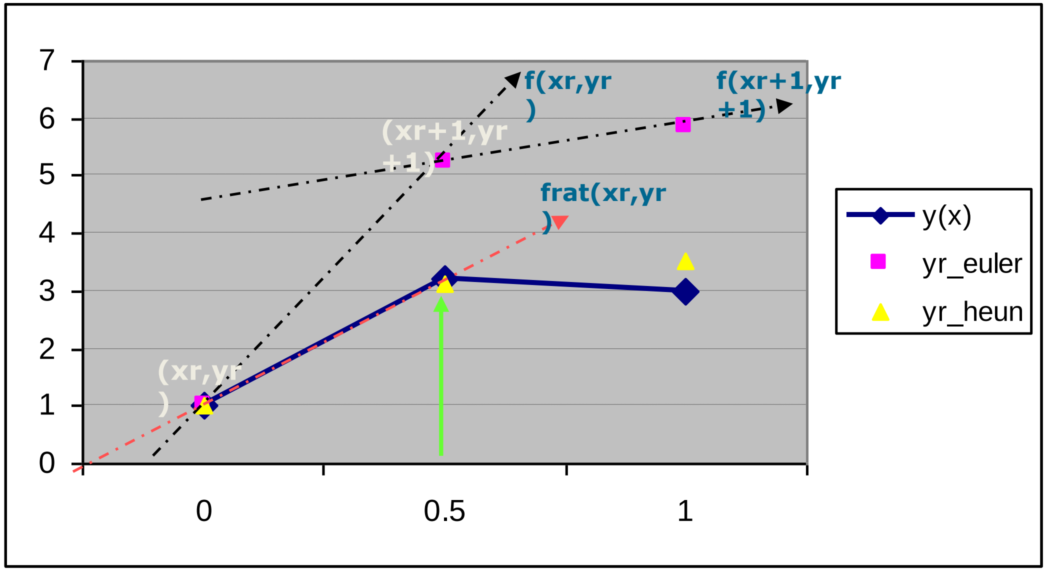
$$
\boxed{
\begin{aligned}
&(x_r, y_r);\ f(x_r, y_r) \\
&y^0_{r+1} = y_r + hf(x_r, y_r) \\
&(x_{r+1}, y^0_{r+1});\ f(x_{r+1}, y^0_{r+1}) \\
&\overline{f(x_r, y_r)} = \frac{1}{2}\left(f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y^0_{r+1})\right) \\
&y_{r+1} = y_r + h\overline{f(x_r, y_r)}
\end{aligned}
}
$$

atau ditulis sekaligus sebagai berikut

$$
\boxed{y_{r+1} = y_r + \frac{h}{2}\left[f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y_r + hf(x_r, y_r))\right]}
$$

Metode Heun (Cont.)

- Secara geometris :



Metode Runge-Kutta

- Bentuk umum Runge Kutta Orde n:

  $y_{r+1} = y_r + a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n$

  Dengan $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ adalah konstanta

  $k_1 = hf(x_r, y_r)$

  $k_2 = h(f(x_r + p_1h,\ y_r + q_{11}k_1)$

  $k_3 = h(f(x_r + p_2h, y_r + q_{21}k_1 + q_{22}k_2)$

  $k_4 = h(f(x_r + p_3h, y_r + q_{31}k_1 + q_{32}k_2 + q_{33}k_3)$

  …

  $k_n = h(x_r + p_{n-1}h, y_r + q_{n-1,1}k_1 + q_{n-1,2}k_2 + \ldots + q_{n-1,n-1}k_{n-1})$

- Galat
  - Per langkah Runge Kuta orde n : $O(h^{n+1})$
  - Kumulatif orde n : $O(h^n)$

Metode Runge Kutta (Cont.)

- Orde 1

  $k_1 = hf(x_r, y_r)$

  $y_{r+1} = y_r + a_1 k_1 \; ; \; a_1 = 1$

  didapat

  $y_{r+1} = y_r + hf(x_r, y_r) \rightarrow$ Metode Euler

  Galat :

  Per langkah : $O(h^2)$

  Kumulatif : $O(h)$

Metode Runge Kutta (Cont.)

- Orde 2

  $k_1 = hf(x_r, y_r)$

  $k_2 = h(f(x_r+p_1h, y_r+q_{11}k_1)$

  $y_{r+1} = y_r + a_1k_1 + a_2k_2$

  Dengan penurunan rumus yang sudah ada didapatkan :

  $a_1 = 1\text{-}a_2 = 1\text{-}t$

  $p_1 = 1/(2a_2) = 1/(2t)$

  $q_{11} = 1/(2a_2) = 1/(2t)$

  Artinya ada tak berhingga formula orde dua.

  Dengan $a_1=a_2 = ½$, $q_{11} = 1$, $p_1 = 1$

  $k_1 = hf(x_r, y_r)$

  $k_2 = h(f(x_r+h, y_r+k_1)$

  $y_{r+1} = y_r + ½ (k_1 + k_2)$ → Metode Heun

Metode Runge Kutta (Cont.)

- Orde 3

$k_1 = hf(x_r, y_r)$

$k_2 = h(f(x_r+p_1h,\ y_r+q_{11}k_1)$

$k_3 = h(f(x_r+p_2h, y_r+q_{21}k_1+q_{22}k_2)$

$y_{r+1} = y_r + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3$

dengan menggunakan penurunan rumus yang ada didapatkan :

$k_1 = hf(x_r, y_r)$

$k_2 = h(f(x_r+1/2\ h,\ y_r+1/2\ k_1)$

$k_3 = h(f(x_r+h, y_r-k_1+2k_2)$

$y_{r+1} = y_r + 1/6(\ k_1 + 4k_2 + k_3)$

Metode Runge Kutta (Cont.)

- Orde 4

$k_1 = hf(x_r, y_r)$

$k_2 = h(f(x_r+p_1h, y_r+q_{11}k_1)$

$k_3 = h(f(x_r+p_2h, y_r+q_{21}k_1+q_{22}k_2)$

$k_4 = h(f(x_r+p_3h, y_r+q_{31}k_1+q_{32}k_2+q_{33}k_3)$

$y_{r+1} = y_r + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4$

dengan menggunakan penurunan rumus yang ada didapatkan :

$k_1 = hf(x_r, y_r)$

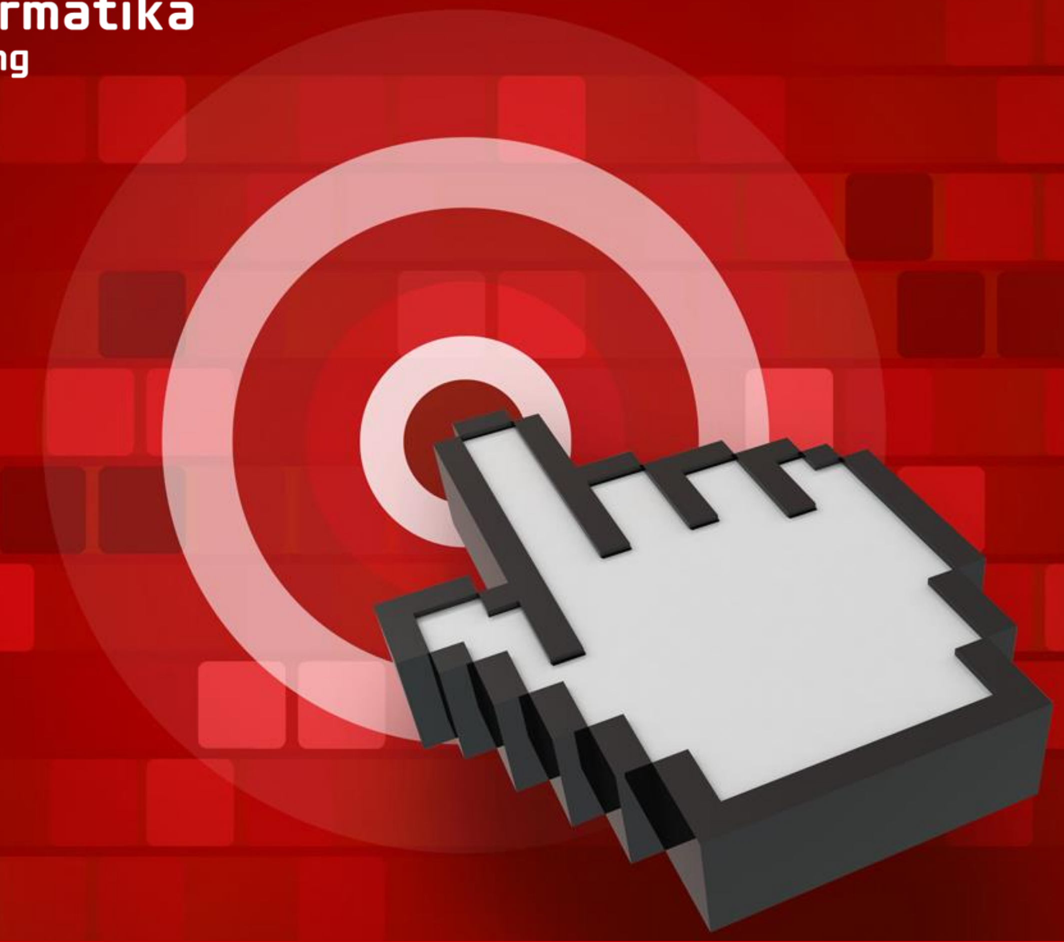
$k_2 = h(f(x_r+1/2\ h, y_r+1/2\ k_1)$

$k_3 = h(f(x_r+1/2h, y_r+1/2\ k_2)$

$k_4 = h(f(x_r+h, y_r+k_3)$

$y_{r+1} = y_r + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University



THANK YOU