

# CNH2G4/ KOMPUTASI NUMERIK

TIM DOSEN

KK MODELING AND COMPUTATIONAL EXPERIMENT

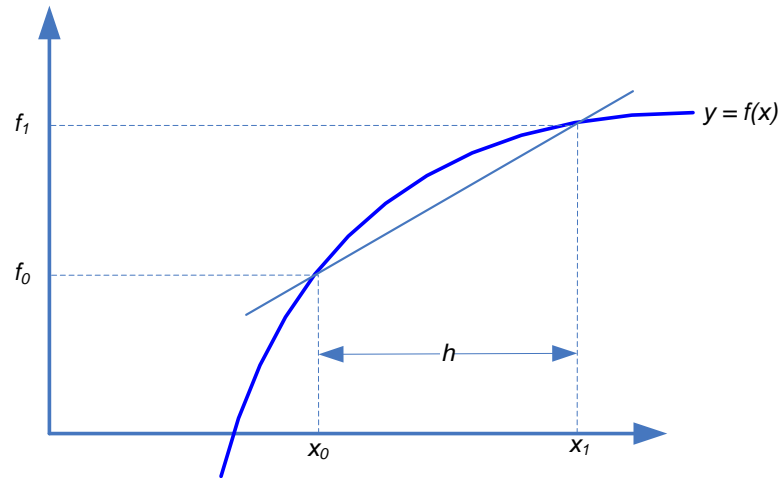


**10**

**TURUNAN NUMERIK**

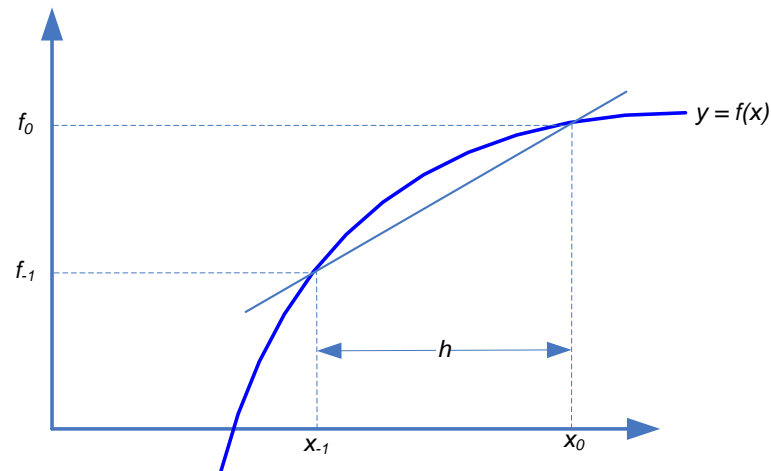
- ▶ Permasalahan : mencari hampiran nilai turunan fungsi  $f$  di suatu titik.

► Pendekatan selisih maju



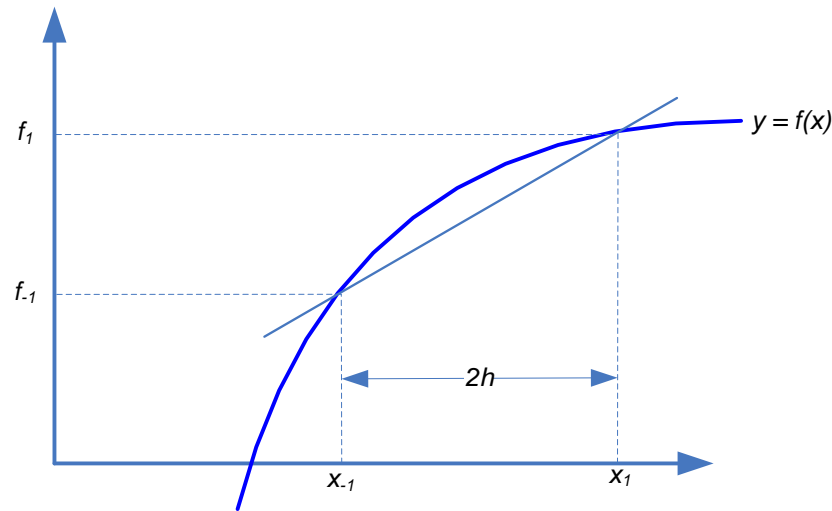
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

- ▶ Pendekatan selisih mundur



$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \frac{f_0 - f_{-1}}{h}$$

► Pendekatan selisih-pusat



$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

- ▶ Diberikan titik-titik  $(x_i, f_i)$ ,  $i=0,1,2,\dots,n$  yang dalam hal ini  $x_i = x_0 + ih$  dan  $f_i = f(x_i)$ .
- ▶ Kita ingin menghitung  $f'(x)$ , yang dalam hal ini  $x = x_0 + ih$

Uraikan  $f(x_{i+1})$  disekitar  $x_i$ :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \dots$$

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \dots$$

$$hf_i' = f_{i+1} - f_i - \frac{h^2}{2} f_i'' + \dots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2} f_i''$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) \quad \text{yang dalam hal ini, } O(h) = -h/2 f''(t), \quad x_i < t < x_{i+1}$$

Untuk nilai-nilai  $f$  di  $x_0$  dan  $x_1$  persamaannya :

$$f_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h) \quad \text{dalam hal ini, } O(h) = h/2 f''(t), \quad x_i < t < x_{i+1}$$

Uraikan  $f(x_{i-1})$  disekitar  $x_i$  :

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i-1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \dots$$

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \dots$$

$$hf_i' = f_i - f_{i-1} + \frac{h^2}{2} f_i'' + \dots$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \frac{h}{2} f_i''$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) \quad \text{yang dalam hal ini, } O(h) = h/2 f''(t), \quad x_{i+1} < t < x_i$$

Untuk nilai-nilai  $f$  di  $x_0$  dan  $x_1$  persamaan rumusnya :

$$f_0' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h) \quad \text{dalam hal ini, } O(h) = h/2 f''(t), \quad x_{i+1} < t < x_i$$



Kurangkan dua persamaan :

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf_i' + \frac{h^3}{3} f_i'''' + \dots$$

$$2hf_i' = f_{i+1} - f_{i-1} - \frac{h^3}{3} f_i'''' + \dots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f_i'''' + \dots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad \text{yang dalam hal ini,}$$

$$O(h) = -h^2/6 f''''(t), \quad x_{i-1} < t < x_{i+1}$$

Untuk nilai-nilai  $f$  di  $x_0$  dan  $x_1$  persamaan rumusnya :

$$f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2) \quad \text{dalam hal ini, } O(h^2) = -h/6 f''''(t), \quad x_{i-1} < t < x_{i+1}$$

Tambahkan persamaan (P.8.4) dengan persamaan (P.8.6) di atas :

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2 f_i'' + \frac{h^4}{12} f_i^{(4)} + \dots$$

$$f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} = h^2 f_i'' + \frac{h^4}{12} f_i^{(4)}$$

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} f_i^{(4)}$$

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \quad \text{dalam hal ini, } O(h^2) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(t), \quad x_{i-1} < t < x_{i+1}$$

Untuk nilai-nilai  $f$  di  $x_{-1}$ ,  $x_0$  dan  $x_1$  persamaan rumusnya :

$$f_0'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2) \quad \text{dalam hal ini, } O(h^2) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(t), \quad x_{-1} < t < x_{i+1}$$

Dengan cara yang sama seperti di atas, diperoleh :

$$f_i'' = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + O(h) \quad \text{dalam hal ini, } O(h) = h f''(t), x_{i-2} < t < x_i$$

Untuk nilai-nilai  $f$  di  $x_{-2}$ ,  $x_0$  dan  $x_1$  persamaan rumusnya :

$$f_0'' = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_0}{h^2} + O(h) \quad \text{dalam hal ini, } O(h) = hf''(t), x_{i-2} < t < x_i$$

Dengan cara yang sama seperti di atas, diperoleh :

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O(h) \quad \text{dalam hal ini, } O(h) = -h f''(t), x_i < t < x_{i+2}$$

Untuk nilai-nilai  $f$  di  $x_{-2}$ ,  $x_0$  dan  $x_1$  persamaan rumusnya :

$$f_0'' = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h) \quad \text{dalam hal ini, } O(h) = -hf''(t), x_i < t < x_{i+2}$$

## Turunan Pertama

$$\textit{selisih\_maju} \Rightarrow f'_0 = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)$$

$$\textit{selisih\_mundur} \Rightarrow f'_0 = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h)$$

$$\textit{selisih\_pusat} \Rightarrow f'_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$\textit{selisih\_maju} \Rightarrow f'_0 = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} + O(h^2)$$

$$\textit{selisih\_pusat} \Rightarrow f'_0 = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} + O(h^4)$$

## Turunan Kedua

$$\text{selisih}_{-pusat} \Rightarrow f_0'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$\text{selisih}_{-mundur} \Rightarrow f_0'' = \frac{f_{-2} - 2f_{-1} + f_0}{h^2} + O(h)$$

$$\text{selisih}_{-maju} \Rightarrow f_0'' = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h)$$

$$\text{selisih}_{-maju} \Rightarrow f_0'' = \frac{-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0}{h^2} + O(h^2)$$

$$\text{selisih}_{-pusat} \Rightarrow f_0'' = \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O(h^4)$$

## Turunan Ketiga

$$\textit{selisih\_maju} \Rightarrow f_0''' = \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{h^3} + O(h)$$

$$\textit{selisih\_pusat} \Rightarrow f_0''' = \frac{f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3} + O(h^2)$$

## Turunan Keempat

$$\textit{selisih\_maju} \Rightarrow f_0^{(4)} = \frac{f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0}{h^4} + O(h)$$

$$\textit{selisih\_pusat} \Rightarrow f_0^{(4)} = \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4} + O(h^2)$$

- ▶ Diberikan data dalam bentuk tabel sebagai berikut :
- a. Hitung  $f'(1.7)$  dengan pendekatan selisih pusat  $O(h^2)$  dan  $O(h^4)$
- b. Hitung  $f'(1.4)$  dengan pendekatan selisih-pusat orde  $O(h^2)$ ?
- c. Rumus apa yang digunakan untuk menghitung  $f'(1.3)$  dan  $f'(2.5)$ ?

$x$	$f(x)$
1.3	3.669
1.5	4.482
1.7	5.474
1.9	6.686
2.1	8.166
2.3	9.974
2.5	12.182

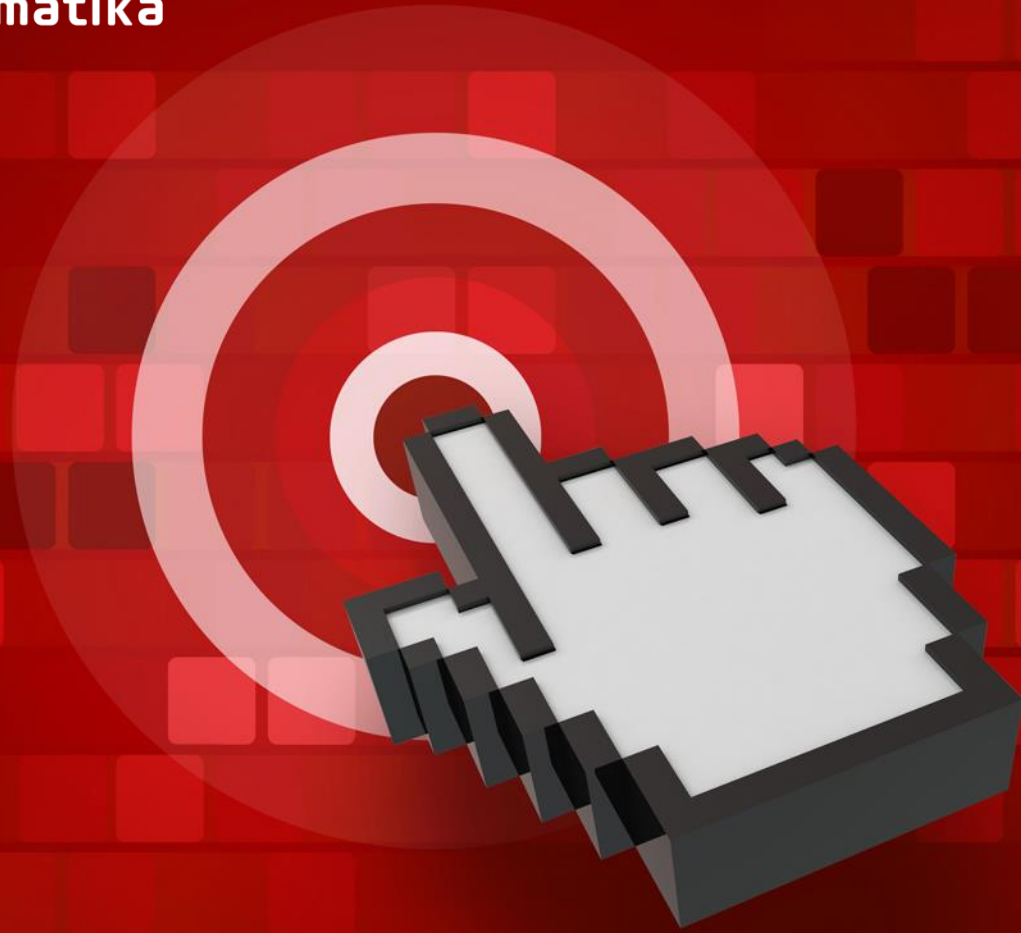


- ▶ Diberikan data dalam bentuk tabel sebagai berikut :
- a. Hitung  $f'(1.2)$  dan  $f''(1.2)$  untuk  $h=0.1$  dan  $h=0.001$  dengan pendekatan selisih pusat  $O(h^2)$ .
- b. Hitung  $f'(1.000)$  dan  $f'(1.400)$ ? Gunakan  $h = 0.1$
- c. Tabel disamping kanan adalah tabel  $f(x) = \cos(x)$ . Bandingkan jawaban yang anda peroleh dengan nilai eksaknya.

$x$	$f(x)$
1.000	0.54030
1.100	0.45360
1.198	0.36422
1.199	0.36329
1.200	0.36236
1.201	0.36143
1.202	0.36049
1.300	0.26750
1.400	0.16997



Fakultas Informatika  
School of Computing  
Telkom University



*THANK YOU*